

یادگیری ماشین
(۰۱-۸۰۵-۱۱-۱۳)
فصل دهم



دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده‌ی فضای مجازی
پاییز ۱۳۹۶
احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- انواع دسته‌بندی
 - بر پایه‌ی درست‌نمایی
 - بر پایه‌ی جداساز
- جداساز قطبی
 - تصمیم مدل‌های قطبی
 - تعبیر هندسی جداساز قطبی
 - جداسازی دودسته‌ای و چنددسته‌ای
- مروری بر جداسازی پارامتری
- نزول گرادیان
- رتبه‌بندی



دسته‌بندی بر پایه‌ی تابع درست‌نمایی

Likelihood-based classification (Generative models)

- برای دسته‌بندی یک سری «تابع جداساز $(g_i(x))$ » مناسبه می‌شود:

$$g_i(\mathbf{x}) = \max_{j=1}^K g_j(\mathbf{x})$$

اگر

کلاس C_i انتخاب می‌شود

- ابتدا احتمال پیشین $(p(C_i))$ و تابع چگالی احتمال داده‌ها در هر کلاس $(p(x|C_i))$ بر اساس تابع درست‌نمایی مناسبه شده، سپس بر اساس قانون Bayes، احتمال پسین $(P(C_i|x))$ به دست آمده و براساس آن تابع جداساز تعریف می‌شود:

$$g_i(\mathbf{x}) = \log P(C_i|\mathbf{x})$$

- این شیوه به «دسته‌بندی بر پایه‌ی درست‌نمایی» موسوم است. در واقع بر اساس مدلی که برای داده‌ها تخمین زده می‌شود، جداساز به دست می‌آید.

- در روش‌های پارامتری، نیمه‌پارامتری و ناپارامتری از این شیوه استفاده شد.



دسته‌بندی بر پایه‌ی جداساز

discriminant-based classification (discriminative models)

• در این روش، بدون تخمین توزیع داده‌ها، به صورت مستقیم جداساز تخمین زده می‌شود.

– گفته می‌شود این دسته از روش‌ها در دسته‌ی روش‌های ناپارامتری قرار دارند، در این بیان منظور از پارامتر، پارامترهای تابع چگالی احتمال کلاس‌هاست.

– در این حالت یک مدل برای جداساز تعریف می‌شود:

$$g_i(x|\Phi_i)$$

– پارامترهای جداساز به صورت «صریح» مشخص شده‌اند برای خلاف روش‌های مبتنی بر درست‌نمایی که به صورت «ضمنی» و براساس توزیع داده‌ها به دست می‌آیند.



دسته‌بندی بر پایه‌ی جداساز (ادامه...)

- فرآیند آموزش یافتن (بهینه‌سازی) پارامترهای جداساز بر اساس یک مجموعه‌ی آموزشی و با هدف افزایش درستی دسته‌بندی است. در این حالت به جای تخمین درست توزیع داده‌ها هر کلاس، هدف تخمین درست مرزهای بین دسته‌هاست.
- از نظر طرفداران این رویکرد برآورد توزیع داده‌های یک کلاس از تخمین جداساز، مسأله‌ی دشوارتری است.
 - برای یک مدل مسأله، محقول نیست آن را به مسائل دشوارتر تقسیم کرد!
 - البته زمانی این گفته درست است که جداساز با یک مدل ساده تخمین زده شود.



جداساز خطی

- ساده‌ترین جداسازی که می‌توان در نظر گرفت، «جداساز خطی» است:

$$g_i(\mathbf{x} | \mathbf{w}_i, w_{i0}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0} = \sum_{j=1}^d w_{ij} x_j + w_{i0}$$

- در بیشتر موارد استفاده از جداساز خطی ترجیح داده می‌شود، به دلایل زیر:

- سادگی: دارای پیچیدگی از مرتبه‌ی $o(d)$
- تفسیرپذیری: به راحتی می‌توان بر اساس آن به استخراج دانش پرداخت؛ خروجی مجموع وزن‌دار ورودی است. وزن هر بعد اهمیت و علامت آن اثر آن خصیصه را نشان می‌دهد.
- در بسیاری موارد جداساز خطی بهینه است: توزیع داده‌های کلاس گاوسی با ماتریس کواریانس یکسان



- چنان‌که مدل خطی پیچیدگی لازم را نداشته باشد، می‌توان سراغ جداسازهای پیچیده‌تری رفت:

$$g_i(\mathbf{x} | \mathbf{W}_i, \mathbf{w}_i, w_{i0}) = \mathbf{x}^T \mathbf{W}_i \mathbf{x} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

$$g_i(\mathbf{x}) = w_0 = \sum_{i=1}^k w_i x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k w_{ij} x_i x_j$$

جداساز درجه‌ی دو

- دارای پیچیدگی از مرتبه‌ی $O(d^2)$
- نیاز به داده‌های آموزشی بیشتر
- احتمال بروز overfitting بیشتر

- یک راه معادل استفاده از جملات با مرتبه بالاتر (higher order terms) است.

$$z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = x_1^2, z_4 = x_2^2, z_5 = x_1 x_2$$

- به جای جداساز پیچیده نگاشت غیر خطی به فضای با جداساز خطی

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k w_{ij} \phi_j(\mathbf{x})$$

Potential functions(1964)



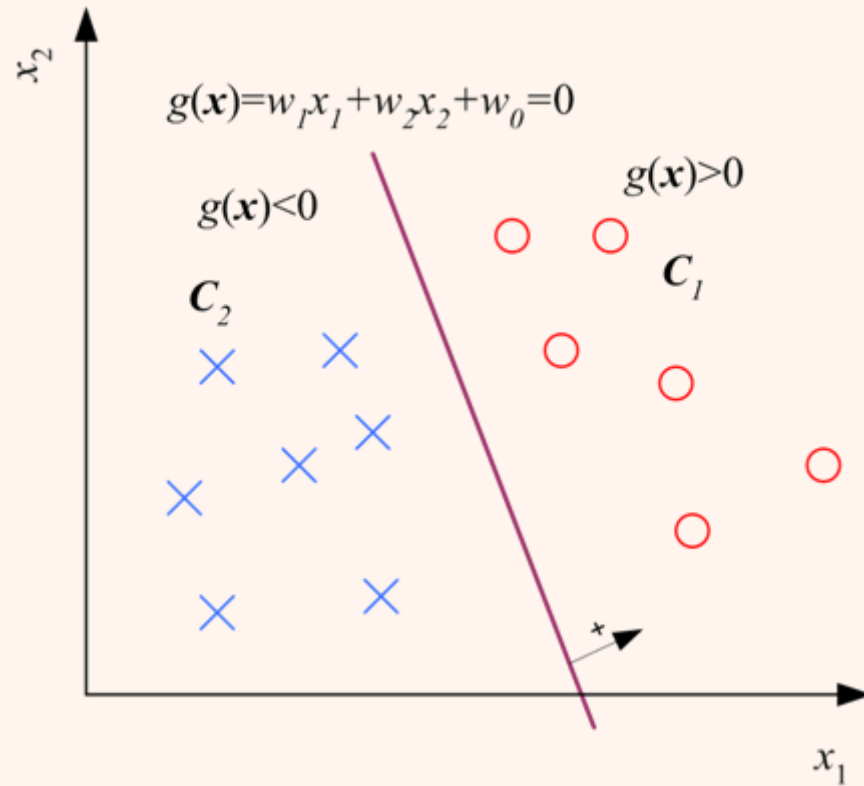
- در این حالت یک تابع جداساز (اگر سطح جداکننده) کافیست:

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x}) \\
 &= (\mathbf{w}_1^T \mathbf{x} + w_{10}) - (\mathbf{w}_2^T \mathbf{x} + w_{20}) \\
 &= (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \mathbf{x} + (w_{10} - w_{20}) \\
 &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0
 \end{aligned}$$

بردار وزنها

مدآستانه

$$\text{choose} \begin{cases} C_1 & \text{if } g(\mathbf{x}) > 0 \\ C_2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



دسته‌بندی دوتایی-تعبیر هندسی

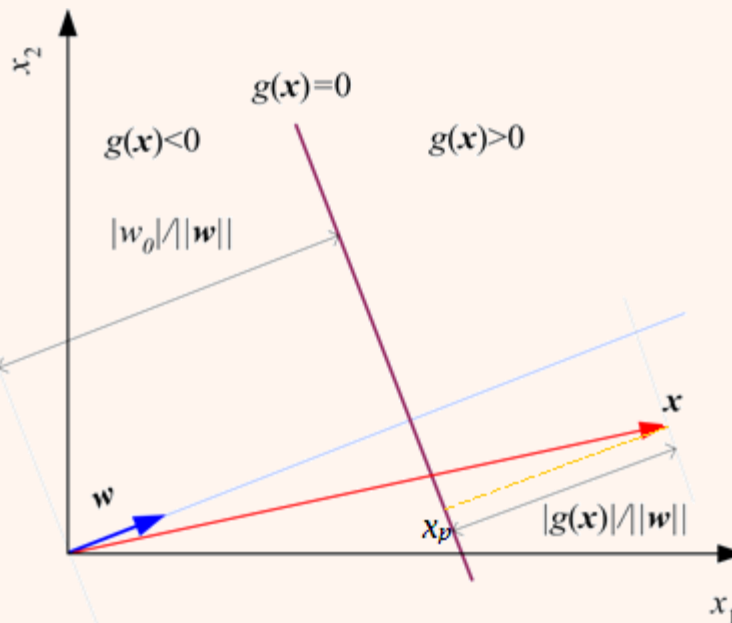
- در صورتی که r فاصله‌ی x از [ابر] سطح جداکننده باشد و x_p نگاشت x بر روی سطح، خواهیم داشت:

$$x = x_p + r \frac{w}{\|w\|}$$

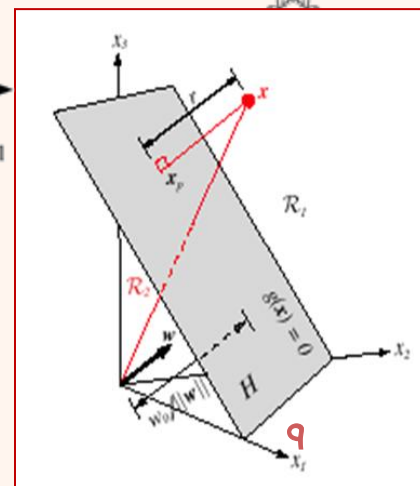
$$g(x) = w^T \left[x_p + r \frac{w}{\|w\|} \right] + w_0$$

$$g(x) = w^T x_p + w_0 + r \frac{w^T w}{\|w\|}$$

$$g(x) = r \|w\| \quad r = \frac{g(x)}{\|w\|} \quad r_0 = \frac{w_0}{\|w\|}$$



Duda et al.



• در این حالت به k تابع جداساز نیاز است:

$$g_i(\mathbf{x} | \mathbf{w}_i, w_{i0}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

در نظر گرفتن چنین جداسازی به معنای این است که همگی دسته‌ها جدایی‌پذیر فضا در نظر گرفته شوند.

$$g_i(\mathbf{x} | \mathbf{w}_i, w_{i0}) = \begin{cases} > 0 & \text{if } \mathbf{x} \in C_i \\ \leq 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

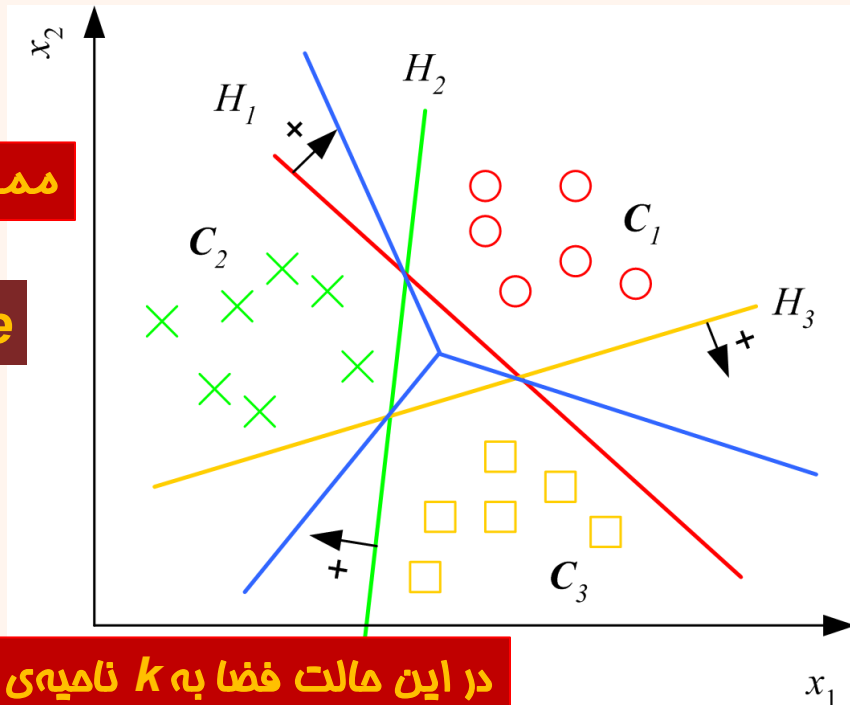
Linearly separable

ممکن است همگی دسته‌ها جدایی‌پذیر فضا نباشند:

Choose C_i if

Linear machine

$$g_i(\mathbf{x}) = \max_{j=1}^K g_j(\mathbf{x})$$



Pairwise Separation

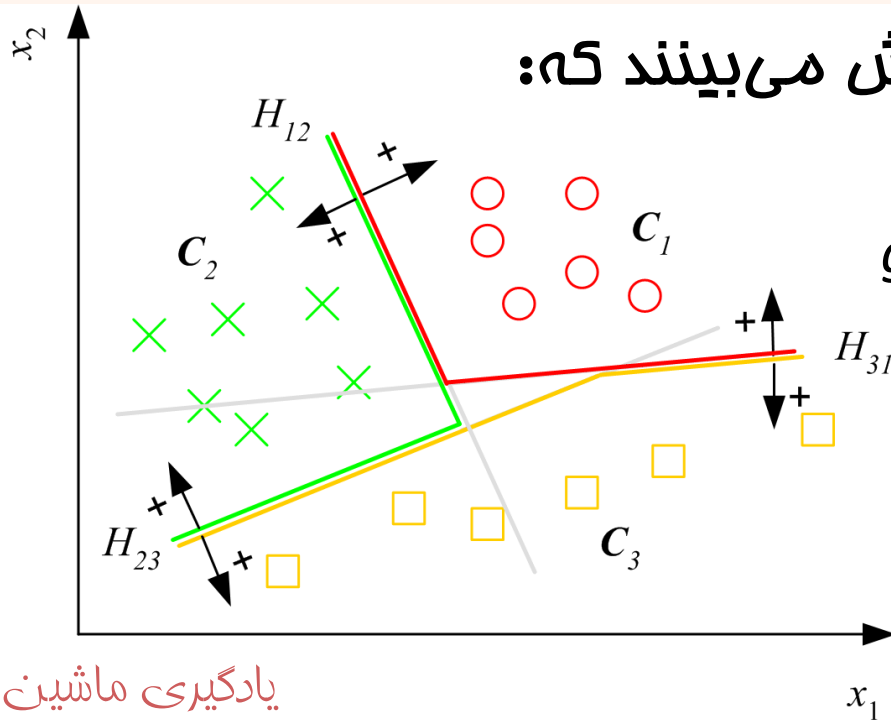
one-versus-one

جداساز دو به دو

- اگر همه‌ی کلاس‌ها جدایی‌پذیر خطی نباشند، یک رویکرد مناسب تقسیم مسأله به چند جدایی‌ساز خطی است.
 - برای هر دو کلاس یک جداساز تعریف شود.
- در این صورت $k(k-1)/2$ جداساز مورد نیاز است.

$$g_{ij}(\mathbf{x} | \mathbf{w}_{ij}, w_{ij0}) = \mathbf{w}_{ij}^T \mathbf{x} + w_{ij0}$$

- پارامترها به گونه‌ای آموزش می‌بینند که:



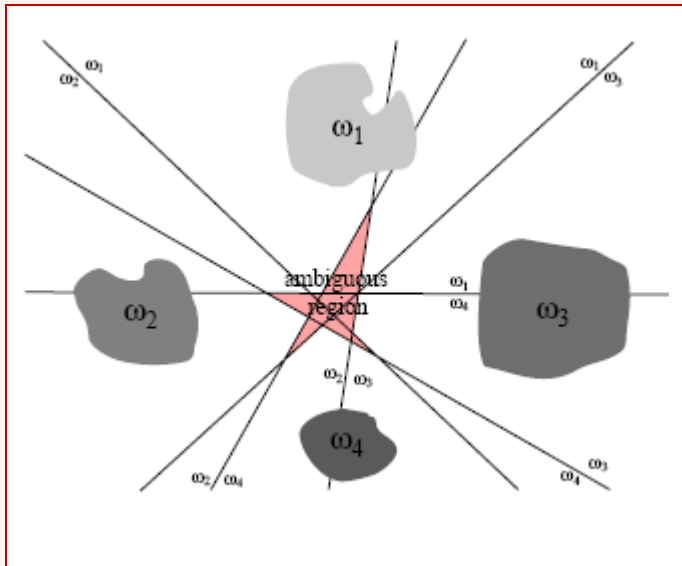
$$g_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{cases} > 0 & \text{if } \mathbf{x} \in C_i \\ \leq 0 & \text{if } \mathbf{x} \in C_j \\ \text{don't care} & \text{otherwise} \end{cases}$$

- در زمان تست:
choose C_i if
 $\forall j \neq i, g_{ij}(\mathbf{x}) > 0$



- در این حالت ممکن است برخی نواحی رابطه‌ی پیش برقرار نباشد.
- در این حالت معیار دیگری را می‌توان جایگزین نمود:

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j \neq i} g_{ij}(\mathbf{x})$$



Duda et. al.

این شیوه نیز نمونه‌ی دیگری از تبدیل یک مسأله‌ی پیچیده به چند مسأله‌ی ساده‌تر است



- در دسته‌بندی مبتنی بر جداساز، پارامترها به گونه‌ای بهینه‌سازی می‌شوند که فضای دسته‌بندی حداقل شود:

$$w^* = \arg \min_w E(w | X)$$

- در بیشتر مواقع، راه حل تحلیلی برای یافتن پارامترها وجود ندارد و چاره‌ای جز استفاده از یک روش بهینه‌سازی تکرارشونده نخواهد بود.

- استفاده از گرادیان نزولی یکی از پرکاربردترین راه‌کارهاست.

- ماتریس گرادیان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_w E = \left[\frac{\partial E}{\partial w_1}, \frac{\partial E}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial E}{\partial w_d} \right]^T$$

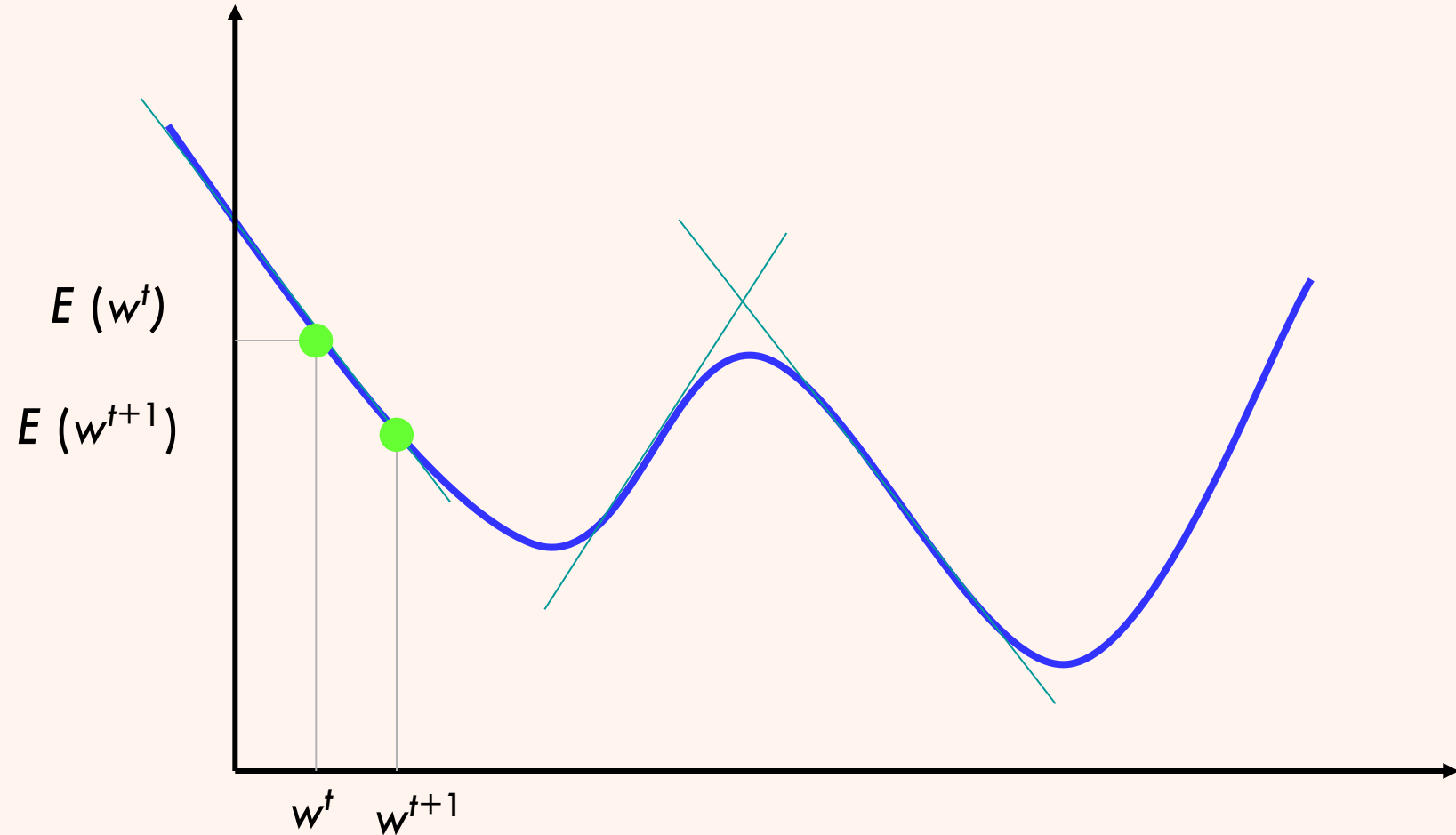


Gradient-Descent

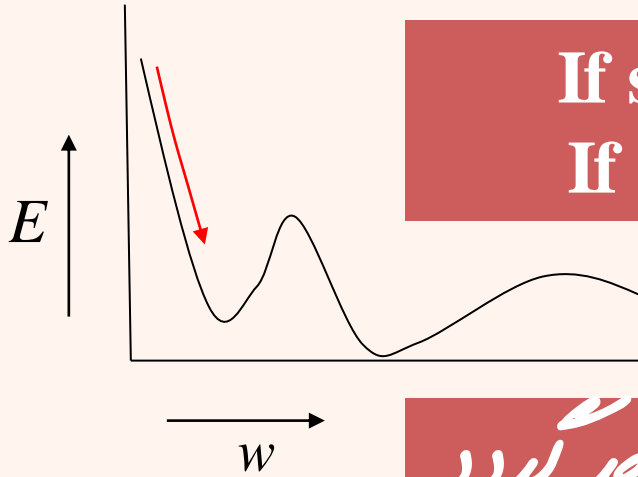
$$\Delta w_i = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_i}, \forall i$$

$$w_i = w_i + \Delta w_i$$

- پارامترها با یک مقدار تصادفی مقداردهی می‌شوند.
- بر خلاف جهت گرادیان مقدار پارامترها را به روز می‌شوند.

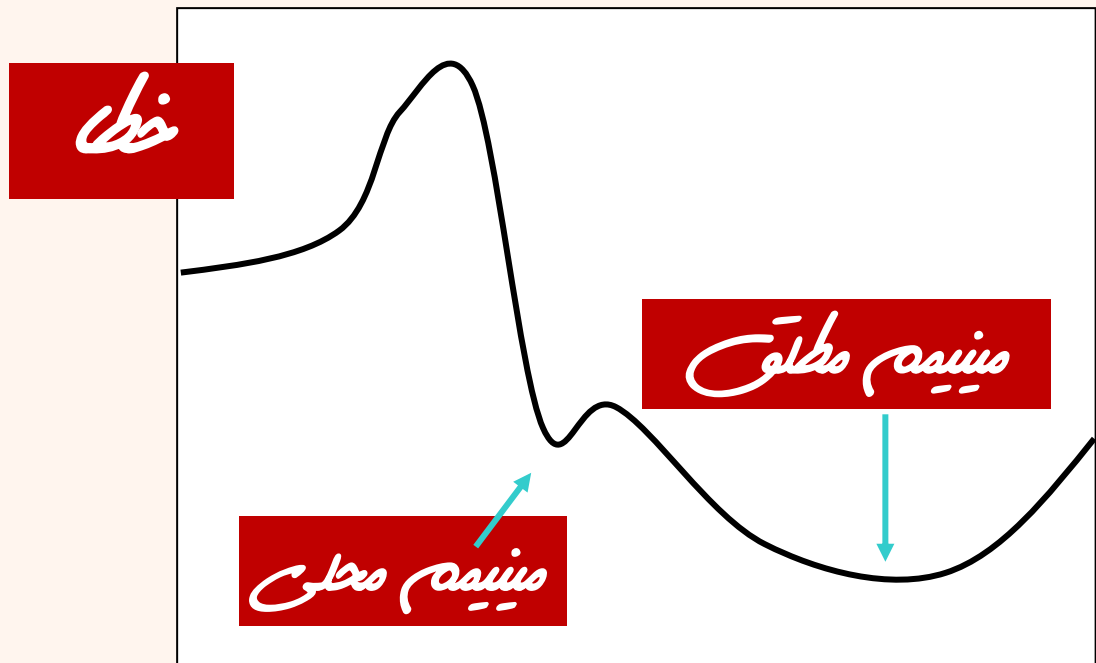


Gradient Descent



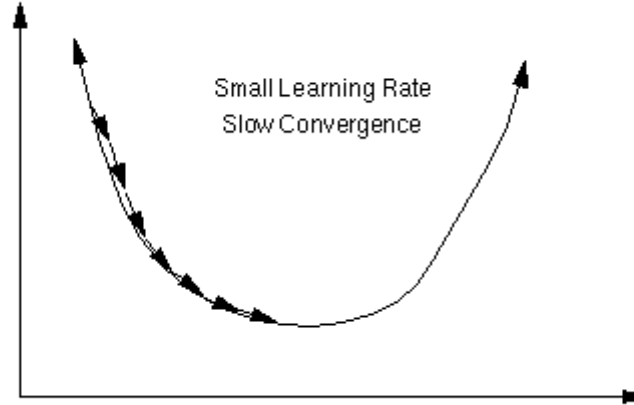
If slope is negative \rightarrow increase w
If slope is positive \rightarrow decrease w

مینیمم محلی جایی است که مشتق صفر گردد

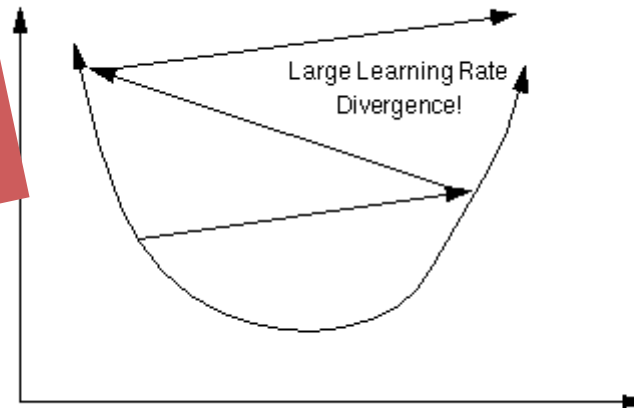


تنظیم نرخ یادگیری

همه را این کند است.

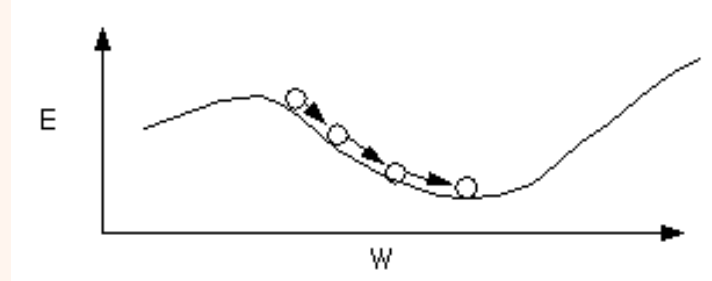
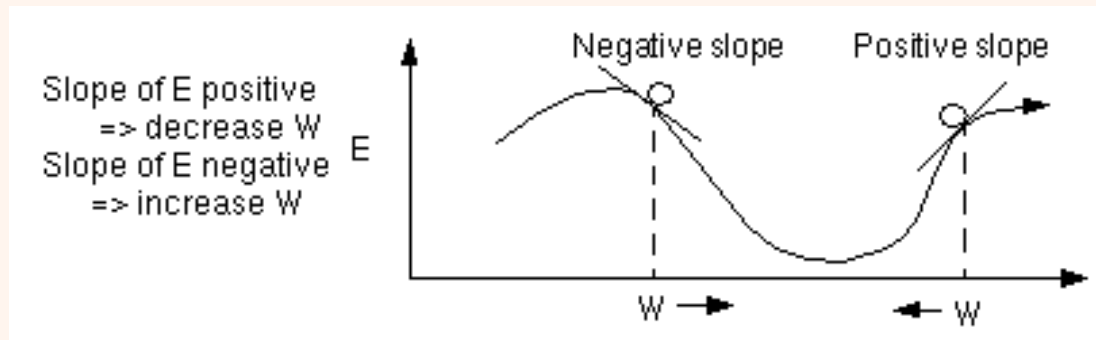
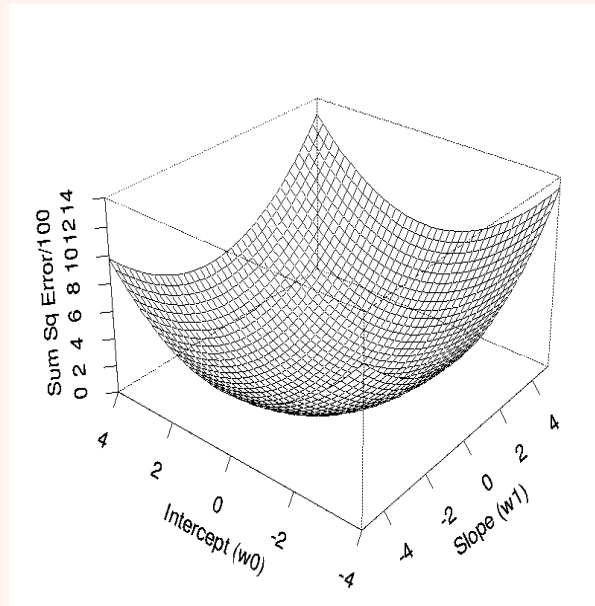
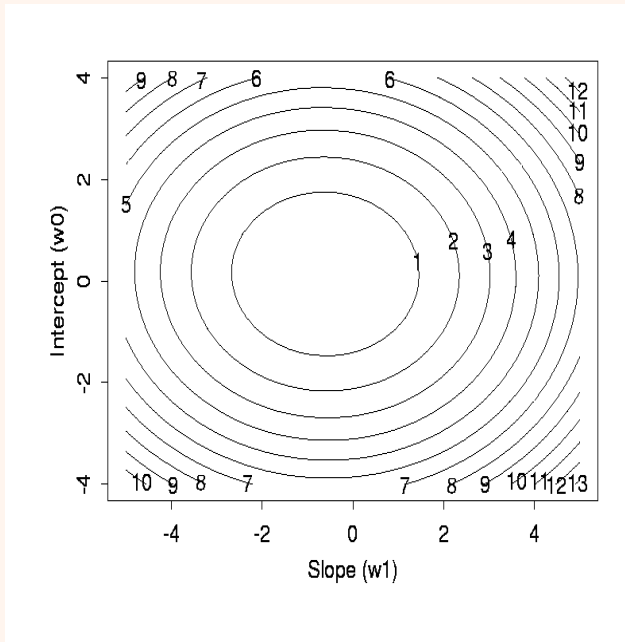


بیستم ناپایدار است.



Steepest descent (کمینه کردن خطا (ادامه...))

rule



مروری بر جداسازی پارامتری

- در صورتی که داده‌ها از توزیع گاوسی تبعیت کنند و ماتریس کواریانس یکسانی داشته باشند، جداساز بهینه، خطی خواهد بود:

$$p(\mathbf{x} | C_i) \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma)$$

$$g_i(\mathbf{x} | \mathbf{w}_i, w_{i0}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

$$\mathbf{w}_i = \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_i \quad w_{i0} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_i^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_i + \log P(C_i)$$

- برای یک مجموعه‌ی آموزشی ابتدا مقادیر میانگین و ماتریس کواریانس هر کلاس محاسبه می‌شود.
- برای حالت دو کلاس، خواهیم داشت:

$$y \equiv P(C_1 | \mathbf{x}) \quad \text{and} \quad P(C_2 | \mathbf{x}) = 1 - y$$

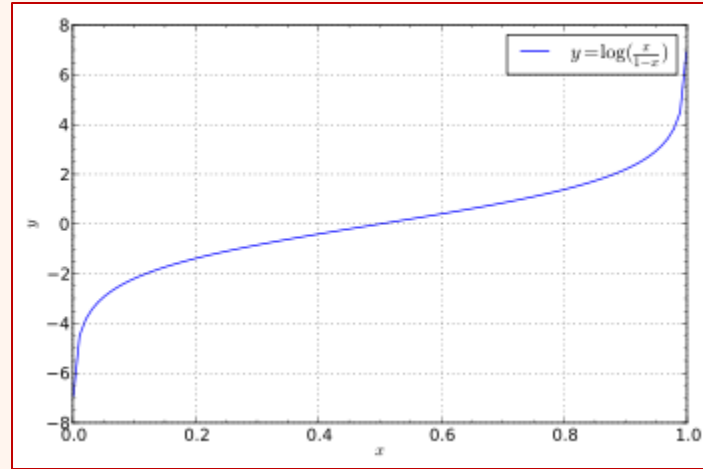
$$\text{choose } C_1 \text{ if } \begin{cases} y > 0.5 \\ y / (1 - y) > 1 \\ \log [y / (1 - y)] > 0 \end{cases} \quad \text{and } C_2 \text{ otherwise}$$



مروری بر جداسازی پارامتری (ادامه...)

- LOGIT به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{logit}(y) = \log \frac{y}{1-y}$$



در نتیجه داده به کلاس یک تعلق دارد اگر و تنها اگر

$$\text{logit}(P(C_1|\mathbf{x})) > 0$$

وگرنه متعلق به کلاس دو خواهد بود.



مروری بر جداسازی پارامتری (ادامه...)

$$\begin{aligned}\text{logit}(P(C_1|\mathbf{x})) &= \log \frac{P(C_1|\mathbf{x})}{1-P(C_1|\mathbf{x})} = \log \frac{P(C_1|\mathbf{x})}{P(C_2|\mathbf{x})} \\ &= \log \frac{p(\mathbf{x}|C_1)}{p(\mathbf{x}|C_2)} + \log \frac{P(C_1)}{P(C_2)} \\ &= \log \frac{(2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-(1/2)(\mathbf{x}-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu_1)\right]}{(2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\left[-(1/2)(\mathbf{x}-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu_2)\right]} + \log \frac{P(C_1)}{P(C_2)} \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0\end{aligned}$$

$$\text{where } \mathbf{w} = \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) \quad w_0 = -\frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2)^T \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2) + \log \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$

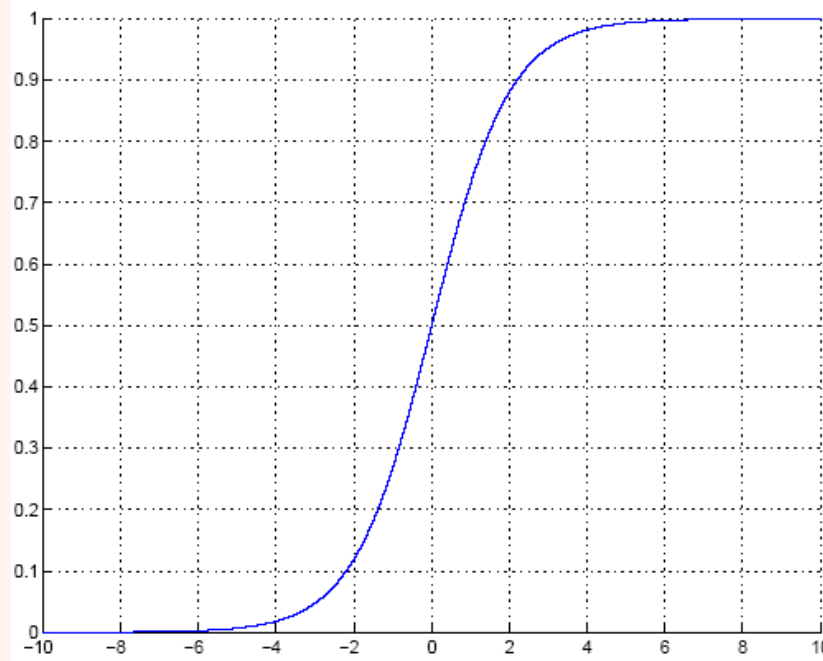
The inverse of logit

$$\log \frac{P(C_1|\mathbf{x})}{1-P(C_1|\mathbf{x})} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0$$

$$P(C_1|\mathbf{x}) = \text{sigmoid}(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0) = \frac{1}{1 + \exp\left[-(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0)\right]}$$



تابع sigmoid



Calculate $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0$ and choose C_1 if $g(\mathbf{x}) > 0$, or
Calculate $y = \text{sigmoid}(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0)$ and choose C_1 if $y > 0.5$

در حالت دوم تابع sigmoid ارتباط مقدار تابع
جداساز و احتمال پسین را نشان می‌دهد.



Logistic Regression

- در دسته‌بندی مبتنی بر درست‌نمایی ابتدا، $P(C_1)$ و $P(x|C_1)$ محاسبه شده، سپس مقدار $P(C_1|x)$ به دست می‌آید.

- در logistic discrimination احتمال پسین به صورت مستقیم برآورد می‌شود.

- در صورتی که لگاریتم نسبت درست‌نمایی دو کلاس خطی باشد:

$$\log \frac{p(\mathbf{x}|C_1)}{p(\mathbf{x}|C_2)} = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0^o$$

- با توجه به قانون Bayes:

$$\text{logit}(P(C_1|\mathbf{x})) = \log \frac{P(C_1|\mathbf{x})}{1 - P(C_1|\mathbf{x})} = \log \frac{p(\mathbf{x}|C_1)}{p(\mathbf{x}|C_2)} + \log \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$



حالت دوکلاسه

$$\text{logit}(P(C_1|\mathbf{x})) = \log \frac{P(C_1|\mathbf{x})}{1-P(C_1|\mathbf{x})} = \log \frac{p(\mathbf{x}|C_1)}{p(\mathbf{x}|C_2)} + \log \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$
$$= \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0$$

$$\text{where } w_0 = w_0^o + \log \frac{P(C_1)}{P(C_2)}$$

$$y = \hat{P}(C_1|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0)]}$$

بدین ترتیب، تقریبی از احتمال پسین به دست می‌آید.

در واقع مسأله یافتن (آموختن) w و w_0 است.



آموزش (حالت دو کلاسه)

$$y = \hat{P}(C_1|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\boldsymbol{w}^T \mathbf{x} + w_0)]}$$

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^t, r^t\}_t \quad r^t | \mathbf{x}^t \sim \text{Bernoulli}(y^t)$$

در این جا به صورت مستقیم، مقدار y تخمین زده می‌شود. درست‌نمایی \mathcal{X} به ازای پارامترهای مورد نظر محاسبه شده:

$$l(\boldsymbol{w}, w_0 | \mathcal{X}) = \prod_t (y^t)^{r^t} (1 - y^t)^{(1-r^t)}$$

بر اساس آن تابع خطا محاسبه می‌شود:

$$E = -\log l$$

$$E(\boldsymbol{w}, w_0 | \mathcal{X}) = -\sum_t r^t \log y^t + (1 - r^t) \log (1 - y^t)$$

هدف کاهش میزان خطا است اما هیچ راه تحلیلی برای حل این مسأله وجود ندارد.



آموزش (حالت دو کلاسه)، نزول گرادیان

$$y = \hat{P}(C_1|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0)]}$$

$$E(\mathbf{w}, w_0|\mathcal{X}) = -\sum_t r^t \log y^t + (1 - r^t) \log (1 - y^t)$$

If $y = \text{sigmoid}(a)$ $\frac{dy}{da} = y(1 - y)$

$$\Delta w_j = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_j} = \eta \sum_t \left(\frac{r^t}{y^t} - \frac{1 - r^t}{1 - y^t} \right) y^t (1 - y^t) x_j^t$$

$$= \eta \sum_t (r^t - y^t) x_j^t, j = 1, \dots, d$$

$$\Delta w_0 = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_0} = \eta \sum_t (r^t - y^t)$$



الگوریتم

For $j = 0, \dots, d$
 $w_j \leftarrow \text{rand}(-0.01, 0.01)$

Repeat

For $j = 0, \dots, d$

$\Delta w_j \leftarrow 0$

For $t = 1, \dots, N$

$o \leftarrow 0$

For $j = 0, \dots, d$

$o \leftarrow o + w_j x_j^t$

$y \leftarrow \text{sigmoid}(o)$

$\Delta w_j \leftarrow \Delta w_j + (r^t - y)x_j^t$

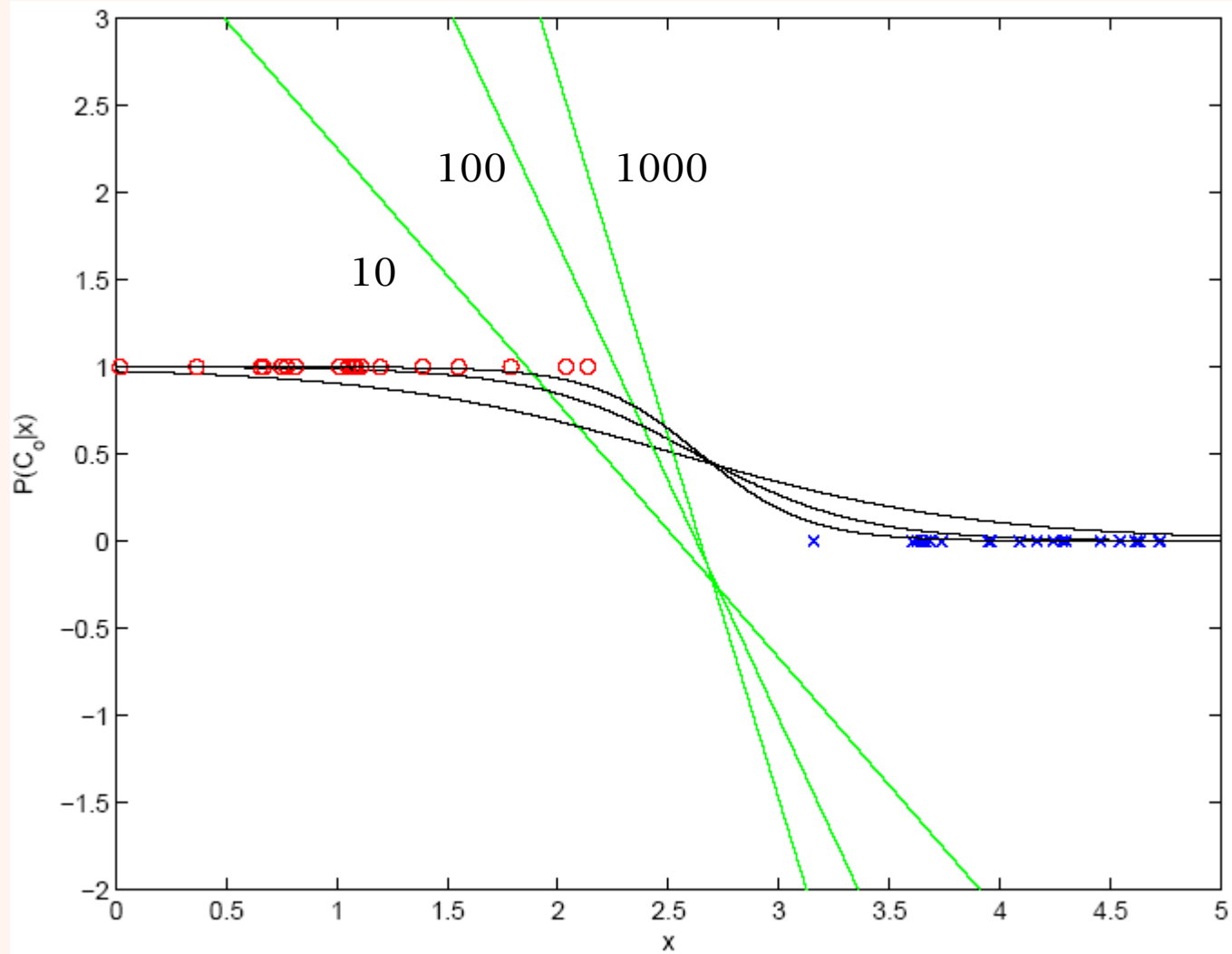
For $j = 0, \dots, d$

$w_j \leftarrow w_j + \eta \Delta w_j$

Until convergence



مثال



$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}^t, r^t\}_t \quad r^t | \mathbf{x}^t \sim \text{Mult}_K(1, \mathbf{y}^t)$$

$$\log \frac{p(\mathbf{x} | C_i)}{p(\mathbf{x} | C_K)} = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}$$

$$\frac{p(C_i | \mathbf{x})}{p(C_K | \mathbf{x})} = \exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}] \quad w_{i0} = w_{i0}^o + \log P(C_i) / P(C_K)$$

$$\sum_{i=1}^{K-1} \frac{p(C_i | \mathbf{x})}{p(C_K | \mathbf{x})} = \frac{1 - p(C_K | \mathbf{x})}{p(C_K | \mathbf{x})} = \sum_{i=1}^{K-1} \exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]$$

$$p(C_K | \mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{K-1} \exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]}$$



حالت چنددسته‌ای

$$p(C_K|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{K-1} \exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]} \quad \frac{p(C_i|\mathbf{x})}{p(C_K|\mathbf{x})} = \exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]$$

$$p(C_i|\mathbf{x}) = \frac{\exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]}{1 + \sum_{i=1}^{K-1} \exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]}$$

برای این که با همی کلاس‌ها یکسان برخورد شود:

$$y_i = \hat{P}(C_i|\mathbf{x}) = \frac{\exp[\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0}]}{\sum_{j=1}^K \exp[\mathbf{w}_j^T \mathbf{x} + w_{j0}]}, i = 1, \dots, K$$

softmax



مماسبهی ماکزیمم است، با این تفاوت که مشتق‌پذیر است.

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^t, \mathbf{r}^t\}_t \quad r^t | \mathbf{x}^t \sim \text{Mult}_K(1, \mathbf{y}^t)$$

$$l(\{\mathbf{w}_i, w_{i0}\}_i | \mathcal{X}) = \prod_t \prod_i (y_i^t)^{r_i^t}$$

$$E(\{\mathbf{w}_i, w_{i0}\}_i | \mathcal{X}) = -\sum_t r_i^t \log y_i^t$$

هدف کاهش میزان خطا است. هیچ راه تملیلی برای حل این مسأله وجود ندارد.

$$\Delta \mathbf{w}_j = \eta \sum_t (r_j^t - y_j^t) \mathbf{x}^t \quad \Delta w_{j0} = \eta \sum_t (r_j^t - y_j^t)$$

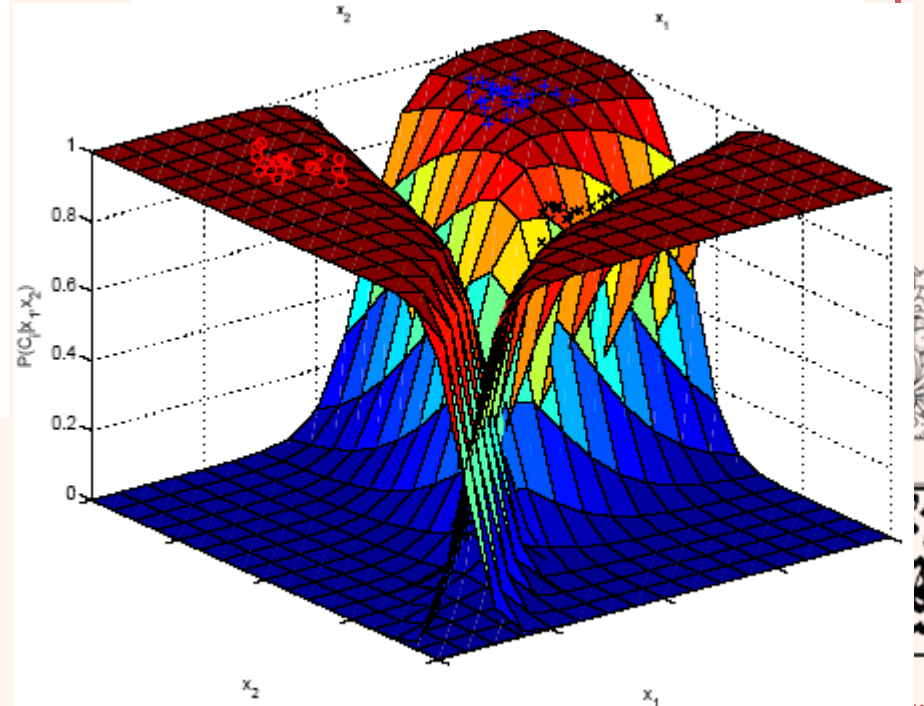
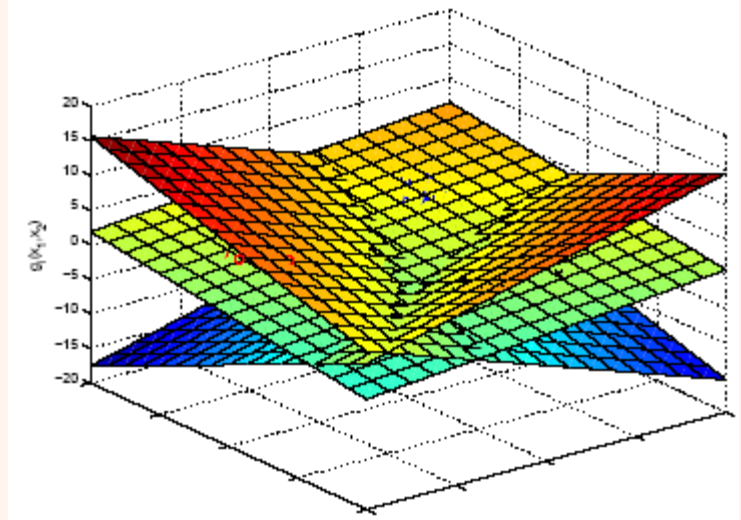
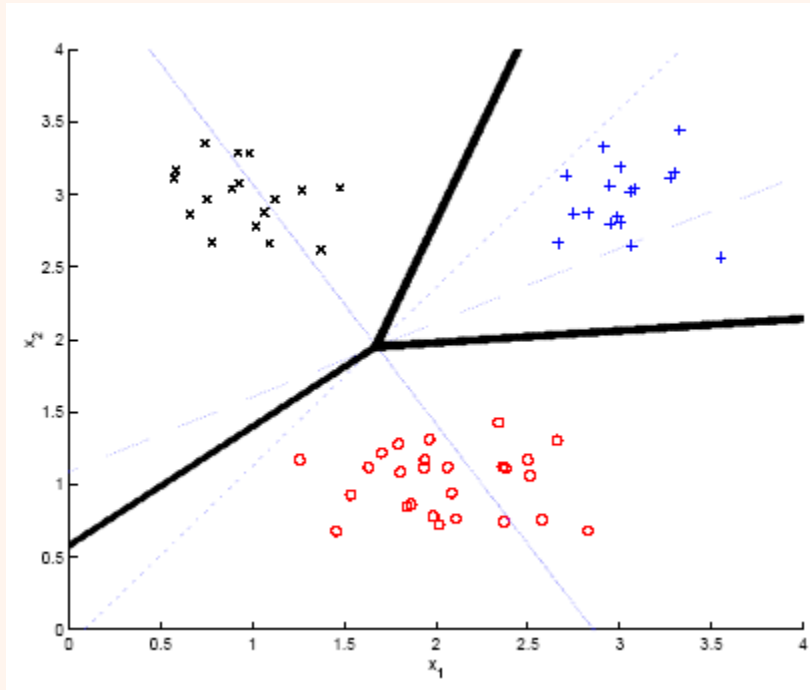


الگوریتم

```
For  $i = 1, \dots, K$ , For  $j = 0, \dots, d$ ,  $w_{ij} \leftarrow \text{rand}(-0.01, 0.01)$ 
Repeat
  For  $i = 1, \dots, K$ , For  $j = 0, \dots, d$ ,  $\Delta w_{ij} \leftarrow 0$ 
  For  $t = 1, \dots, N$ 
    For  $i = 1, \dots, K$ 
       $o_i \leftarrow 0$ 
      For  $j = 0, \dots, d$ 
         $o_i \leftarrow o_i + w_{ij} x_j^t$ 
      For  $i = 1, \dots, K$ 
         $y_i \leftarrow \exp(o_i) / \sum_k \exp(o_k)$ 
      For  $i = 1, \dots, K$ 
        For  $j = 0, \dots, d$ 
           $\Delta w_{ij} \leftarrow \Delta w_{ij} + (r_i^t - y_i) x_j^t$ 
    For  $i = 1, \dots, K$ 
      For  $j = 0, \dots, d$ 
         $w_{ij} \leftarrow w_{ij} + \eta \Delta w_{ij}$ 
  Until convergence
```



مثال



یادگیری رتبه‌بندی

- رتبه‌بندی مسأله‌ای متفاوت از دسته‌بندی و رگرسیون است.

- به عنوان مثال در موتورهای جستجو

- به عنوان مثال اگر x^u و x^v دو نمونه باشند، مثلاً دو فیلم و u به v ترجیح داده شود، در این حالت یک تابع برای امتیازدهی ($g(x/\theta)$) آموزش داده می‌شود به نحوی که

- $g(x^u) > g(x^v)$

- و در نهایت

- Choose u if $g(x^u/\theta) = \max_t g(x^t/\theta)$



یادگیری رتبه‌بندی (ادامه...)

- در این حالت تابع خطا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(\mathbf{w} | \{r^u, r^v\}) = \sum_{r^u < r^v} [g(x^v | \theta) - g(x^u | \theta)]_+$$

where a_+ is equal to a if $a \geq 0$ and 0 otherwise.

- در صورتی که مدل خطی در نظر گرفته شود:
- $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$
- تعبیر هندسی آن یعنی یافتن جهتی که در صورتی که داده‌ها در راستای آن نگاهت شوند، رتبه‌ی مورد نظر به دست آید.

$$\Delta w_j = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_j} = -\eta (x_j^v - x_j^u), j = 1, \dots, d$$



مثال

